(#) Metodom svođenja na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda riješiti sljedeći sistem

$$\dot{x} - \ddot{y} + y = \cos t$$
$$x + \dot{y} - y = e^{3t}$$

Rj. $Dx + (-D^2+1)y = \cos t$

$x + (D-1)y = e^{3t} \quad / D$

---

$Dx + (-D^2+1)y = \cos t \quad \dots (I)$

$Dx + (D^2 - D)y = 3e^{3t} \quad \dots (II)$

---

$(I)-(II): \quad (-2D^2 + D + 1)y = \cos t - 3e^{3t}$

$$-2\ddot{y} + \dot{y} + y = \cos t - 3e^{3t} \quad \dots (*)$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina drugog reda po $y$-nu sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$$x = x_h + x_p$$

$-2\ddot{y} + \dot{y} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{-4}$

$\lambda_1 = \dfrac{-4}{-4} = 1, \quad \lambda_2 = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$

Ako su $\lambda_1$ i $\lambda_2$ korijeni karakteristične jednačine takvi da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tada
$y_h = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$$y_h = C_1 e^{t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

Izrazi $\cos t$ i $e^{3t}$ se ne pojavljuju na desnoj strani dif. jednačine $(*)$ pa je dovoljno diferencirati samo njih tj.

$$Y_p = A\cos t + B\sin t + Ce^{3t}$$

pa imamo

$$\dot{Y}_p = -A\sin t + B\cos t + 3C e^{3t}$$

$$\ddot{Y}_p = -A\cos t - B\sin t + 9C e^{3t}$$

$$(-2)\,\ddot{Y}_p = 2A\cos t + 2B\sin t - 18 C e^{3t}$$

Prema $(*)$

$$(3A+B)\cos t + (-A+3B)\sin t - 14Ce^{3t} = \cos t - 3e^{3t}$$

$$\begin{aligned} 3A+B&=1 \\ -A+3B&=0 \\ -14C&=-3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A=\frac{3}{10}, \quad B=\frac{1}{10}, \quad C=\frac{3}{14}$$

$$y(t) = C_1e^{t} + C_2e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t + \frac{3}{14}e^{3t} \qquad \dots (1)$$

Iz druge jednačine sistema imamo $x = e^{3t} - \dot{y} + y$

$$\dot{y} = C_1e^{t} - \frac{1}{2}C_2e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t + \frac{9}{14}e^{3t}$$

$$-\dot{y} = -C_1e^{t} + \frac{1}{2}C_2e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{3}{10}\cos t - \frac{1}{10}\sin t - \frac{9}{14}e^{3t}$$

$$x(t) = \frac{4}{7}e^{3t} + \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t + \frac{3}{2}C_2e^{-\frac{1}{2}t} \qquad \dots (2)$$

Opšte rješenje sistema su (1) i (2)

(7) Metodom varijacije konstanti riješiti dati sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 3x + y + \cos t$$
$$\dot{y} = -x + y - \cos t$$

Rj. Riješimo prvo odgovarajući homogeni sistem

$$\dot{x} = 3x + y$$
$$\dot{y} = -x + y$$

Matrica sistema je $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = 3-4\lambda+\lambda^2+1 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$$

Karakteristična jednačina sistema je $(\lambda-2)^2=0$, pa je njezin korijen $\lambda=2$ višestrukosti 2.

Opšte rješenje homogenog sistema tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} P_k(t) \\ Q_k(t) \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

gdje su $P_k(t)$ i $Q_k(t)$ polinomi reda $k$, a $k = r+s-n$ gdje je

- $r$ rang matrice $A-\lambda I$
- $s$ višestrukost korijena
- $n$ red sistema

$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow r=1$ Kako je $s=2$ i $n=2$ to je

$k = 1 + 2 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = (A + Bt)e^{2t}$

$$Y = (C + Dt)e^{2t} \qquad \ldots (1)$$

Ako (1) uvrstimo u sistem dobićemo

$$Be^{2t} + (2A + 2Bt)e^{2t} = 3(A + Bt)e^{2t} + (C + Dt)e^{2t}$$
$$De^{2t} + (2C + 2Dt)e^{2t} = -(A + Bt)e^{2t} + (C + Dt)e^{2t}$$

$$\begin{aligned} B + 2A &= 3A + C \\ 2B &= 3B + D \\ D + 2C &= -A + C \\ 2D &= -B + D \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A - B + C& \\ B \quad\quad + D &= 0 \\ -A \quad - C - D &= 0 \\ -B \quad\quad - D &= 0 \end{aligned}$$

rješimo sistem npr. Kronecker-Kapel. metodom

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow$$

dvije promjenjive uzimamo proizv.

$$\begin{aligned} A + \quad + D &= 0 \\ B + D &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= -C - D \\ B &= -D \end{aligned}$$

$$C = C_1, \quad D = C_2$$
$$A = -C_1 - C_2, \quad B = -C_2$$

Opšte rješenje homogenog sistema je

$$x_h = (-C_1 - C_2 - C_2 t)e^{2t}$$
$$Y_h = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$$

Sada ćemo metodom varijacije konstanti tražiti opšte rješenje datog nehomogenog sistema u obliku

$$x(t) = (-C_1(t) - C_2(t) - C_2(t)t)e^{2t}$$
$$y(t) = (C_1(t) + C_2(t)t)e^{2t}$$

pri čemu izvode $c_1'$ i $c_2'$ f-ja $c_1(t)$ i $c_2(t)$ određujemo iz sistema

$$(-c_1' - c_2' - t c_2') e^{2t} = \cos t \qquad / e^{-2t}$$
$$(c_1' + t c_2') e^{2t} = -\cos t$$

$$-c_1' - c_2' - t c_2' = e^{-2t} \cos t \qquad \dots (I)$$
$$c_1' + t c_2' = -e^{-2t} \cos t \qquad \dots (II)$$

$(I) + (II)$: $\quad -c_2' = 0$

$$c_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1' = -e^{-2t} \cos t$$

Integracijom ovih jednačina dobijamo

$$C_1 = \frac{1}{5}(2\cos t - \sin t) e^{-2t} + D_1$$
$$C_2 = D_2$$

Opšte rješenje datog sistema je

$$x(t) = -\frac{1}{5}(2\cos t - \sin t) - D_1 e^{2t} - D_2 e^{2t} - t D_2 e^{2t}$$
$$y(t) = \frac{1}{5}(2\cos t - \sin t) + D_1 e^{2t} + t D_2 e^{2t}$$

(#) Primjenom Laplasove transformacije izračunati integral

$$\int_0^\infty t e^{-2t} \cos t \, dt.$$

Rj: Prema definiciji Laplasove transformacije

$$\underline{\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt}$$

pa je $\mathcal{L}\{t\cos t\}(s) = \int_0^\infty t e^{-st} \cos t \, dt$ iz čega slijedi

$$\mathcal{L}\{t\cos t\}(2) = \int_0^\infty t e^{-2t} \cos t \, dt$$

pa je dati integral jednak vrijednosti $\mathcal{L}\{t\cos t\}(2)$.

Znamo

$$\underline{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)}$$

pa je

$$\mathcal{L}\{t\cos t\}(s) = (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\cos t\}(s) = (-1) \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$= (-1) \frac{1 \cdot (s^2+1) - s \cdot 2s}{(s^2+1)^2} = (-1) \frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\cos t\}(2) = \frac{4-1}{(4+1)^2} = \frac{3}{25}$$

Prema tome

$$\int_0^\infty t e^{-2t} \cos t \, dt = \frac{3}{25}$$

traženo rješenje

(#) Primjenom Laplasove transformacije riješiti diferencijalnu jednačinu $ty'' + (t-2)y' + y = 0$; $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

Rj.

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) \quad \text{gdje je} \quad \mathcal{L}\{y\}(s) = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)$$

Iz osobina Laplace-ovih osobina znamo da je

$$\underline{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s),} \quad \text{gdje} \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

pa imamo

$$\mathcal{L}\{ty''\}(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds}(s^2Y(s)) = (-1)\left(2sY(s) + s^2Y'(s)\right) =$$

$$= -2sY(s) - s^2Y'(s)$$

$$\mathcal{L}\{(t-2)y'\}(s) = \mathcal{L}\{ty'\}(s) - 2\mathcal{L}\{y'\}(s) = (-1)\underbrace{\frac{d}{ds}(sY(s))}_{Y(s)+sY'(s)} - 2sY(s) =$$

$$= -Y(s) - sY'(s) - 2sY(s)$$

Prema tome

$$ty'' + (t-2)y' + y = 0 \quad /\mathcal{L}$$

$$-2sY(s) \underline{- s^2Y'(s)} - \cancel{Y(s)} \underline{- sY'(s)} - 2sY(s) + \cancel{Y(s)} = 0$$

$$(-s^2 - s)Y'(s) - 4sY(s) = 0 \quad /\cdot(-1) \quad /:(s^2+s)$$

$$Y'(s) + \frac{4s}{s^2+s}Y(s) = 0$$

ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = \frac{-4}{s+1} \quad / \int$$

$$\int \frac{d(Y(s))}{Y(s)} = -4 \int \frac{d(s+1)}{s+1}$$

$$\ln Y(s) = (-4) \ln(s+1) + \ln C_1$$

$$Y(s) = \frac{C_1}{(s+1)^4}$$

Iz tabele Laplasovih transformacija $\mathcal{L}\{t^3 e^{-t}\}(s) = \dfrac{3!}{(s+1)^4}$

Prema tome

$$y(t) = C t^3 e^{-t} \quad \text{za} \quad C \neq 0$$

traženo rješenje